Proposition de correction – BTS Mathématiques – Groupement C1 – Session 2025

En-tête

- **Session :** 2025
- **Groupement :** C1
- **Durée :** 2 heures
- **Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou type collège)

Exercice 1 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie l'évolution de l'épaisseur moyenne des glaciers mondiaux depuis 1956, à partir d'un tableau de données (année, rang x_i, épaisseur y_i). On propose plusieurs modélisations (affine, exponentielle, différentielle) et une étude de fonction pour modéliser la perte d'épaisseur.

Partie A – Première modélisation

1. Ajustement affine : est-il approprié ?

On demande si un ajustement affine de y en x est pertinent, d'après le tableau et le nuage de points.

Correction détaillée :

- Un ajustement affine suppose que la perte d'épaisseur évolue de manière linéaire avec le temps (c'est-à-dire que la diminution est constante).
- En observant les données :
  - De 1960 à 1970 : perte de 2 m en 10 ans (soit -0,2 m/an)
  - De 1970 à 1980 : perte de 2 m en 10 ans (toujours -0,2 m/an)
  - De 1980 à 1990 : perte de 2 m en 10 ans (-0,2 m/an)
  - De 1990 à 2000 : perte de 5 m en 10 ans (-0,5 m/an)
  - De 2000 à 2010 : perte de 5 m en 10 ans (-0,5 m/an)
  - De 2010 à 2020 : perte de 9 m en 10 ans (-0,9 m/an)
  - De 2020 à 2023 : perte de 3 m en 3 ans (-1 m/an)
- On constate que la perte s'accélère avec le temps : la pente n'est pas constante.
- Le nuage de points doit donc être courbe, et non aligné.

Un ajustement affine n'est **pas approprié** car la perte d'épaisseur s'accélère avec le temps : la relation n'est pas linéaire.

Point de méthode : Pour juger de la pertinence d'un ajustement affine, il faut vérifier que la variation de y par rapport à x est constante (pente constante).
Erreur fréquente : Se fier uniquement au début des données sans vérifier la tendance sur toute la plage.

2. Compléter le tableau avec $z_i = \ln(-y_i)$

On doit compléter le tableau suivant :

x_i	0	10	20	30	40	50	60	63
y_i	-2	-4	-6	-8	-13	-18	-27	-30
z_i	0,693	1,386	1,792	2,079	?	?	?	?

Calculs :

- $z_4 = \ln(13) \approx 2{,}565$
- $z_5 = \ln(18) \approx 2{,}890$
- $z_6 = \ln(27) \approx 3{,}296$
- $z_7 = \ln(30) \approx 3{,}401$

Tableau complété :

x_i	0	10	20	30	40	50	60	63
y_i	-2	-4	-6	-8	-13	-18	-27	-30
z_i	0,693	1,386	1,792	2,079	2,565	2,890	3,296	3,401

$z_4 = 2{,}565$; $z_5 = 2{,}890$; $z_6 = 3{,}296$; $z_7 = 3{,}401$

Point de méthode : Pour $\ln(-y_i)$, on prend l'opposé car y_i est négatif.
Erreur fréquente : Oublier de prendre la valeur absolue ou arrondir trop tôt.

3. Ajustement linéaire de z en x (moindres carrés)

On cherche l'équation de la droite d'ajustement : z = a x + b

On utilise la méthode des moindres carrés :

- Formules :
  - a = \dfrac{n \sum x_i z_i - \sum x_i \sum z_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}
  - b = \dfrac{\sum z_i - a \sum x_i}{n}
  - n = 8 (nombre de points)

Calculs :

- Sommes nécessaires (on pose les valeurs) :
  - \sum x_i = 0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 63 = 273
  - \sum x_i^2 = 0^2 + 10^2 + 20^2 + 30^2 + 40^2 + 50^2 + 60^2 + 63^2 = 0 + 100 + 400 + 900 + 1600 + 2500 + 3600 + 3969 = 13069
  - \sum z_i = 0,693 + 1,386 + 1,792 + 2,079 + 2,565 + 2,890 + 3,296 + 3,401 = 18,102
  - \sum x_i z_i = (0×0,693) + (10×1,386) + (20×1,792) + (30×2,079) + (40×2,565) + (50×2,890) + (60×3,296) + (63×3,401)
  - Calcul détaillé :
    - 10×1,386 = 13,860
    - 20×1,792 = 35,840
    - 30×2,079 = 62,370
    - 40×2,565 = 102,600
    - 50×2,890 = 144,500
    - 60×3,296 = 197,760

        - $63 \times 3{,}401 = 214{,}263$
    - Somme : $0 + 13{,}860 + 35{,}840 + 62{,}370 + 102{,}600 + 144{,}500 + 197{,}760 + 214{,}263 = 771{,}193$
- On applique les formules :
    - $a = \dfrac{8 \times 771{,}193 - 273 \times 18{,}102}{8 \times 13{,}069 - 273^2}$
    - $8 \times 771{,}193 = 6{,}169{,}544$
      $273 \times 18{,}102 = 4{,}944{,}846$
      $8 \times 13{,}069 = 104{,}552$
      $273^2 = 74{,}529$
      $104{,}552 - 74{,}529 = 30{,}023$
    - $a = \dfrac{6{,}169{,}544 - 4{,}944{,}846}{30{,}023} = \dfrac{1{,}224{,}698}{30{,}023} \approx 0{,}0408$
    - $b = \dfrac{18{,}102 - 0{,}0408 \times 273}{8} = \dfrac{18{,}102 - 11{,}138}{8} = \dfrac{6{,}964}{8} \approx 0{,}870$

L'équation de la droite d'ajustement est : $z = 0{,}041\,x + 0{,}870$

Point de méthode : Bien utiliser les formules des moindres carrés et vérifier les calculs intermédiaires.
Erreur fréquente : Oublier de multiplier les sommes par n ou faire une erreur de calcul dans les produits.

4. Ajustement exponentiel de y en x

On pose $y = A\,e^{a x}$. On a $z = \ln(-y) = a\,x + \ln(-A)$ donc $A = -e^{b}$ et $a = a$.

- Ici, $a \approx 0{,}041$ et $b \approx 0{,}870$
- $A = -e^{0{,}870} \approx -2{,}39$ (arrondi au centième)

L'ajustement exponentiel est : $y = -2{,}39 \times e^{0{,}041\,x}$

Point de méthode : Pour passer de $\ln(-y)$ à y, on utilise l'exponentielle et on n'oublie pas le signe négatif.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif ou mal arrondir les coefficients.

5. Estimation pour 2030 (x = 70)

- $x = 2030 - 1960 = 70$
- $y(70) = -2{,}39 \times e^{0{,}041 \times 70} = -2{,}39 \times e^{2{,}87} \approx -2{,}39 \times 17{,}65 \approx -42{,}2$
- Arrondi à l'unité : -42

En 2030, l'épaisseur moyenne perdue sera d'environ **42 mètres**.

Point de méthode : Bien convertir l'année en rang x, et utiliser la bonne formule.
Erreur fréquente : Oublier de convertir l'année ou arrondir trop tôt.

Partie B – Deuxième modélisation (équation différentielle)

1. Ensemble des solutions de $y' - 0{,}041y = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

- On pose $y' = 0{,}041\ y$
- La solution générale est $y(x) = K\ e^{0{,}041\ x}$ où K est une constante réelle.

L'ensemble des solutions est $y(x) = K\ e^{0{,}041\ x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Point de méthode : Pour une équation différentielle du type $y' = a\ y$, la solution est toujours $y(x) = K\ e^{a\ x}$.
Erreur fréquente : Oublier la constante d'intégration.

2. Détermination de la constante K sachant que g(30) = −8

- On cherche K tel que $g(30) = K\ e^{0{,}041 \times 30} = -8$
- Calcul : $0{,}041 \times 30 = 1{,}23$; $e^{1{,}23} \approx 3{,}421$
- $K = -8 / 3{,}421 \approx -2{,}340$ (arrondi à 10^{-3})
- Donc $g(x) = -2{,}340 \times e^{0{,}041\ x}$

$g(x) = -2{,}340 \times e^{0{,}041\ x}$

Point de méthode : Bien isoler K et arrondir à 10^{-3}.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif ou arrondir trop tôt.

3. Année où la perte atteint 50 m (g(x) = −50)

- On résout $-2{,}340 \times e^{0{,}041\ x} = -50$
- $e^{0{,}041\ x} = 50 / 2{,}340 \approx 21{,}37$
- Prendre le ln : $0{,}041\ x = \ln(21{,}37) \approx 3{,}063$
- $x = 3{,}063 / 0{,}041 \approx 74{,}7$
- L'année correspondante : $1960 + 74{,}7 \approx 2035$

La perte de 50 m sera atteinte **en 2035**.

Point de méthode : Bien résoudre l'équation exponentielle et penser à convertir x en année.
Erreur fréquente : Oublier d'ajouter 1960 à x.

Partie C – Étude de fonction

On considère $f(x) = -2{,}3\ e^{0{,}04\ x}$

1a. Calcul de f′(x)

- $f(x) = -2{,}3\ e^{0{,}04\ x}$
- $f'(x) = -2{,}3 \times 0{,}04 \times e^{0{,}04\ x} = -0{,}092 \times e^{0{,}04\ x}$

$f'(x) = -0{,}092 \times e^{0{,}04\ x}$

1b. Signe de f′(x) et variations de f

- Pour tout $x \geq 0$, $e^{0{,}04\ x} > 0$ donc $f'(x) < 0$

- Donc f est **décroissante** sur [0 ; $+\infty$[

f est décroissante sur [0 ; $+\infty$[

1c. Cohérence avec le contexte

- Oui, c'est cohérent : la perte d'épaisseur augmente (valeur négative de plus en plus grande en valeur absolue), donc l'épaisseur diminue avec le temps.

Oui, c'est cohérent avec la fonte accélérée des glaciers.

Point de méthode : La dérivée négative indique une décroissance.
Erreur fréquente : Confondre décroissance de la fonction et diminution de l'épaisseur (attention au signe).

2. Limite de f en $+\infty$ et validité du modèle

- Lorsque x → $+\infty$, e^{0,04 x} → $+\infty$ donc f(x) → $-\infty$
- Interprétation : le modèle prévoit une perte d'épaisseur sans limite, ce qui n'est pas réaliste (l'épaisseur ne peut pas devenir négative à l'infini).

\lim_{x \to +\infty} f(x) = $-\infty$. Ce modèle n'est pas pertinent sur le long terme car il prévoit une perte infinie, ce qui n'a pas de sens physique.

Point de méthode : Toujours interpréter la limite dans le contexte réel.
Erreur fréquente : Oublier de discuter la validité du modèle.

Exercice 2 (10 points)

Résumé de l'énoncé

Une entreprise fabrique des forets avec trois machines (A, B, C) et on étudie la probabilité d'avoir un foret défectueux, la loi binomiale sur un prélèvement, la conformité du diamètre (loi normale), puis un test d'hypothèse sur la machine C.

Partie A – Probabilités conditionnelles

1. Arbre de probabilités

On complète l'arbre :

- P(A) = 0,20 ; P(B) = 0,40 ; P(C) = 0,40
- P(D|A) = 0,01 ; P(D|B) = 0,02 ; P(D|C) = 0,015
- P($\bar{D}$|A) = 0,99 ; P($\bar{D}$|B) = 0,98 ; P($\bar{D}$|C) = 0,985

Arbre complété :

- Depuis la racine :
  - A (0,20) → D (0,01) ; $\bar{D}$ (0,99)
  - B (0,40) → D (0,02) ; $\bar{D}$ (0,98)
  - C (0,40) → D (0,015) ; $\bar{D}$ (0,985)

Point de méthode : La probabilité totale d'arriver à chaque feuille est le produit des probabilités de chaque branche.
Erreur fréquente : Oublier que la somme des probabilités issues d'un même nœud doit faire 1.

2. Calcul de $P(A \cap D)$

- $P(A \cap D) = P(A) \times P(D|A) = 0{,}20 \times 0{,}01 = 0{,}002$

$P(A \cap D) = 0{,}002$

3. Calcul de $P(D)$

- $P(D) = P(A)\times P(D|A) + P(B)\times P(D|B) + P(C)\times P(D|C)$
- $= 0{,}20\times 0{,}01 + 0{,}40\times 0{,}02 + 0{,}40\times 0{,}015$
- $= 0{,}002 + 0{,}008 + 0{,}006 = 0{,}016$

$P(D) = 0{,}016$

Point de méthode : Utiliser la formule des probabilités totales.
Erreur fréquente : Oublier un terme ou faire une erreur de multiplication.

4. Probabilité qu'un foret défectueux provienne de B : $P_D(B)$

- $P_D(B) = P(B \cap D) / P(D) = (0{,}40 \times 0{,}02) / 0{,}016 = 0{,}008 / 0{,}016 = 0{,}5$

$P_D(B) = 0{,}5$

Point de méthode : Utiliser la formule de la probabilité conditionnelle.
Erreur fréquente : Intervertir le numérateur et le dénominateur.

Partie B – Contrôle de conformité (loi binomiale)

1. Pourquoi X suit une loi binomiale ?

- On effectue 100 tirages indépendants, chaque foret a la même probabilité $p = 0{,}016$ d'être défectueux.
- Donc X suit une loi binomiale $B(n = 100, p = 0{,}016)$.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}016$.

Point de méthode : Vérifier les conditions : nombre d'essais fixé, indépendance, deux issues possibles, probabilité constante.
Erreur fréquente : Confondre avec la loi de Poisson ou ne pas justifier.

2. Probabilité d'aucun foret défectueux

- $P(X = 0) = (1 - p)^{100} = (0{,}984)^{100}$

- Calcul : $\ln(0{,}984) \approx -0{,}01616$; $-0{,}01616 \times 100 = -1{,}616$; $e^{-1{,}616} \approx 0{,}199$

$P(X = 0) \approx 0{,}199$

3. Probabilité d'au plus 2 forets défectueux

- $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
- $P(X = 1) = C(100{,}1) \times 0{,}016 \times (0{,}984)^{99} = 100 \times 0{,}016 \times (0{,}984)^{99}$
- $(0{,}984)^{99} \approx e^{-1{,}6} \approx 0{,}202$
- $P(X = 1) \approx 100 \times 0{,}016 \times 0{,}202 \approx 0{,}323$
- $P(X = 2) = C(100{,}2) \times (0{,}016)^2 \times (0{,}984)^{98} = 4950 \times 0{,}000256 \times 0{,}205 \approx 4950 \times 0{,}0000525 \approx 0{,}260$
- Somme : $0{,}199 + 0{,}323 + 0{,}260 = 0{,}782$

$P(X \leq 2) \approx 0{,}782$

Point de méthode : Bien utiliser la formule de la loi binomiale et additionner les probabilités.
Erreur fréquente : Oublier un terme ou arrondir trop tôt.

Partie C – Contrôle du diamètre (loi normale)

Calcul de la probabilité de conformité ($Y \in [9{,}95 ; 10{,}05]$)

- $Y \sim N(\mu = 10, \sigma = 0{,}02)$
- On cherche $P(9{,}95 \leq Y \leq 10{,}05)$
- On standardise :
  - Pour 9,95 : $z_1 = (9{,}95 - 10)/0{,}02 = -2{,}5$
  - Pour 10,05 : $z_2 = (10{,}05 - 10)/0{,}02 = 2{,}5$
- Donc $P(-2{,}5 \leq Z \leq 2{,}5)$ où $Z \sim N(0,1)$
- Table de la loi normale : $P(Z \leq 2{,}5) \approx 0{,}9938$; $P(Z \leq -2{,}5) \approx 0{,}0062$
- $P = 0{,}9938 - 0{,}0062 = 0{,}9876 \approx 0{,}988$

La probabilité qu'un foret soit conforme est **0,988**.

Point de méthode : Toujours standardiser la variable puis utiliser la table de la loi normale.
Erreur fréquente : Oublier de standardiser ou se tromper de signe.

Partie D – Test d'hypothèse

1. Hypothèse alternative H_1

- H_1 : « $m \neq 10$ » (le diamètre moyen est différent de 10 mm)

$H_1 : m \neq 10$

2. Détermination de h tel que $P(10 - h \leq Z \leq 10 + h) = 0{,}95$ sous H_0

- $Z \sim N(10, 0{,}009)$

- On cherche h tel que $P(-h/0{,}009 \leq (Z - 10)/0{,}009 \leq h/0{,}009) = 0{,}95$
- Soit $P(-u \leq U \leq u) = 0{,}95$ pour $U \sim N(0,1)$
- $u = h/0{,}009$; donc $h = u \times 0{,}009$
- Pour 0,95, $u \approx 1{,}96$ (valeur usuelle pour 95 %)
- $h = 1{,}96 \times 0{,}009 \approx 0{,}0176$
- Arrondi à 10^{-3} : $h = 0{,}018$

$h = 0{,}018$

Point de méthode : Utiliser la table de la loi normale centrée réduite pour 95 % ($u \approx 1{,}96$).
Erreur fréquente : Prendre $h = 1{,}96$ sans multiplier par l'écart-type.

3. Test sur l'échantillon (moyenne observée = 9,97 mm)

- Intervalle de confiance : $[10 - 0{,}018 ; 10 + 0{,}018] = [9{,}982 ; 10{,}018]$
- La valeur observée 9,97 n'appartient pas à cet intervalle.
- On rejette donc H_0 au seuil de 5 %.

Au seuil de 5 %, on **rejette H_0** : la machine C n'est probablement plus correctement réglée.

Point de méthode : Toujours comparer la valeur observée à l'intervalle de confiance.
Erreur fréquente : Oublier de conclure ou conclure à l'inverse.

Formulaire récapitulatif

- y = a x + b : équation d'une droite (ajustement affine)
- z = ln(−y) : passage à la modélisation exponentielle
- y = A e^{a x} : modélisation exponentielle
- y′ = a y : équation différentielle, solution y(x) = K e^{a x}
- Loi binomiale : P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}
- Loi normale centrée réduite : Z = (Y − μ)/σ
- Intervalle de confiance (loi normale) : [\mu − u_{\alpha} \sigma ; \mu + u_{\alpha} \sigma]
- Probabilité conditionnelle : P_B(A) = P(A ∩ B) / P(B)

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

- **Lisez attentivement l'énoncé** : repérez les données, les unités, et les questions indépendantes.
- **Justifiez chaque étape** : une bonne rédaction et des explications claires sont valorisées.
- **Arrondissez uniquement à la fin** : gardez les valeurs exactes pendant les calculs intermédiaires.
- **Utilisez la calculatrice intelligemment** : vérifiez les résultats et ne vous contentez pas du premier affichage.
- **Relisez-vous** : vérifiez vos résultats, les unités et la cohérence avec le contexte.