Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 2 pour la majorité des spécialités, 2,5 en Constructions métalliques, 1,5 en Géologie appliquée, 1 en Maintenance et après-vente des engins de travaux publics et de manutention, 3 en Traitement des matériaux.**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Départ d'un train à très haute vitesse et calcul de l'aire d'une pièce** (13 questions) — **Page 3**

2. **Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse** (13 questions) — **Page 6**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 9**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2018/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d'un train à très haute vitesse et calcul de l'aire d'une pièce

Un projet de train à propulsion électromagnétique fixe comme objectif d'atteindre 400 km/h en moins de deux minutes. L'exercice étudie la distance et la vitesse du wagon par une équation différentielle et l'analyse d'une fonction, puis calcule l'aire d'une pièce destinée à une gare à partir d'un graphique et d'une intégrale.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' − 0,2y = 0.

On réécrit l'équation sous la forme $y' + ay = 0$, avec $a = -0,2$. La formule du sujet donne alors $y(t) = Ce^{-at}$. Cette expression est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, pour toute constante réelle C, et constitue l'ensemble des solutions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = −15t − 75 est une solution de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

La dérivée de $g(t) = -15t - 75$ est $g'(t) = -15$. En substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$. Le résultat est bien le membre de droite de l'équation pour tout $t \in [0, 3]$. Ainsi, g est une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$: la fonction g est bien solution.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant une solution particulière à toutes les solutions de l'équation homogène. On additionne donc $g(t) = -15t - 75$ et $Ce^{0,2t}$, où C est une constante réelle. Cette famille donne toutes les solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t} - 15t - 75$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Sachant qu'au temps t = 0 le wagon est au point de départ, déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle qui vérifie f(0) = 0.

La solution générale est $y(t) = Ce^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale impose $f(0) = C - 75 = 0$, donc $C = 75$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la fonction distance parcourue, qui vérifie bien $f(0) = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75 = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions de f et de f' fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le logiciel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. Comme l'exponentielle est croissante, cela équivaut à $0,2t \geq 0$, soit $t \geq 0$. L'inégalité est donc vérifiée sur tout l'intervalle $[0, 3]$, avec égalité en $t = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$, avec $f'(0) = 0$.

Question 1° b). Déduire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

t	**0**	$]0, 3]$
Signe de $f'(t)$	0	+
Variation de f	$f(0) = 0$	$f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$

La dérivée est positive après 0 : la fonction f est croissante sur $[0, 3]$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f croît de 0 à environ $16,659$ km sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

Au bout d'une minute, la distance parcourue est $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. Le calcul donne environ $1,605$ km. En arrondissant au dixième, on obtient la distance demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après une minute, le wagon a parcouru environ **1,6 km**.

Question 3° a). Sachant que la vitesse du wagon à l'instant t correspond à f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes en kilomètre par minute et arrondir au dixième.

La vitesse à l'instant t est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute. Pour $t = 2$, on obtient $f'(2) = 15e^{0,4} - 15 \approx 7,377$. L'arrondi au dixième donne la vitesse demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À 2 minutes, la vitesse est d'environ **7,4 km/min**.

Question 3° b). Indiquer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse au regard de la vitesse visée de 400 km/h et du délai imposé.

À 2 minutes, la vitesse est d'environ $7,377 \times 60 = 442,6$ km/h. Elle dépasse donc 400 km/h. Pour vérifier le délai, on résout $15(e^{0,2t} - 1) = 400/60$, ce qui donne $t = 5\ln(13/9) \approx 1,839$ minute. Le seuil est atteint avant 2 minutes : l'objectif est respecté.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : le seuil de 400 km/h est atteint après environ **1,839 minute**, avant les 2 minutes.

Question 4°. Choisir, parmi les trois propositions, une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente en abscisse 2 est donnée par $y = f'(2)(t-2) + f(2)$. Avec $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$, on obtient $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$. C'est la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir parmi les trois propositions l'aire A1 du rectangle OPQR, en unité d'aire. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ a une largeur de 3 unités et une hauteur de $2,25$ unités, puisque son bord supérieur est la droite $y = 2,25$. Son aire vaut donc $3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire. Cette valeur correspond à la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 6,75$ u. a. : troisième proposition.

Question 2°. À l'aide de la primitive de g fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire cherchée est $\int_0^3 g(x)\,dx$. Avec la primitive fournie, $G(x) = \frac{27}{4}\ln(x^2 + 9) + c_1$, on calcule $A_2 = G(3) - G(0) = \frac{27}{4}\ln(18/9) = \frac{27}{4}\ln 2$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A en unité d'aire et arrondir le résultat au millième.

Sur la moitié droite, l'aire hachurée est l'aire du rectangle diminuée de l'aire sous la courbe : $A_1 - A_2$. Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire totale vaut $A = 2(A_1 - A_2) = 2(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2)$. On arrondit le résultat au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse

L'exercice analyse l'obsolescence technique et logicielle de smartphones à partir de données recueillies sur une population de 200 appareils. Il étudie ensuite la réparabilité d'un lot de modèle A avec une loi binomiale, puis met en place un test bilatéral sur l'opinion concernant la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données de l'énoncé, recopier et compléter le tableau d'effectifs croisant les smartphones touchés ou non par l'obsolescence technique et ceux touchés ou non par l'obsolescence logicielle.

Sur 200 smartphones, 3 % sont touchés techniquement, soit 6 appareils, et 8 % sont touchés logiciellement, soit 16. Parmi ces 16, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2. Les autres effectifs s'obtiennent en complétant les totaux.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs croisés : 2, 4, 14 et 180 ; totaux des lignes : 6 et 194, totaux des colonnes : 16 et 184.

Question 2°. Pour un smartphone prélevé au hasard, donner P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique et L l'obsolescence logicielle.

Les probabilités simples correspondent aux fréquences indiquées dans l'énoncé. La probabilité conditionnelle est donnée parmi les appareils touchés par l'obsolescence logicielle : 12,5 % d'entre eux sont aussi touchés techniquement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$; $P(L) = 0{,}08$; $P_L(T) = 0{,}125$, soit respectivement 3 %, 8 % et 12,5 %.

Question 3° a). À l'aide des questions précédentes, calculer $P(T \cap L)$.

Par la formule de probabilité conditionnelle, $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. On utilise les données de l'énoncé : 0,08 pour l'obsolescence logicielle et 0,125 pour la probabilité conditionnelle de T sachant L.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap L) = 0{,}010$: 1 % des smartphones sont touchés par les deux types d'obsolescence.

Question 3° b). À l'aide des questions précédentes, calculer $P(T \cup L)$.

Pour calculer la probabilité d'être touché par au moins un des deux types d'obsolescence, on additionne P(T) et P(L), puis on soustrait leur intersection, comptée deux fois dans cette somme : $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cup L) = 0{,}10$: 10 % des smartphones sont touchés par au moins un type d'obsolescence.

Question 3° c). À l'aide des questions précédentes, calculer P_T(L), la probabilité de l'obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité de L sachant T se calcule par $P_T(L) = P(T \cap L) / P(T)$. Avec les résultats précédents, le quotient vaut 0,01 / 0,03. On donne la valeur arrondie au millième, conformément à la consigne générale de l'exercice.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = 1/3 \approx 0{,}333$: environ 33,3 % des smartphones touchés techniquement sont aussi touchés logiciellement.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui associe à un lot de 50 smartphones le nombre d'appareils non réparables, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli, où « non réparable » est le succès de probabilité 0,045. Les tirages sont assimilés à des tirages avec remise, donc indépendants et de même probabilité. X compte le nombre de succès parmi 50 tirages : il suit une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale B(50 ; 0,045), pour compter les appareils non réparables dans un lot de 50 smartphones.

Question 2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables lorsque X = 0. Pour une loi binomiale, $P(X = 0) = (1 - p)^n$. Ici, le calcul est $0{,}955^{50}$; le résultat est arrondi au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est $P(X = 0) \approx 0{,}100$, soit environ 10,0 %.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme pour i allant de 0 à 3, puis recopier et compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et de S à chaque étape.

À chaque étape, l'algorithme ajoute P(X = i) à la somme précédente. Les probabilités sont calculées avec la loi binomiale B(50 ; 0,045), puis arrondies au millième pour compléter le tableau. Les sommes cumulées sont également arrondies au millième.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Valeurs de P(X = i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

À la fin de la boucle, S est la somme de P(X = i) pour i allant de 0 à 3. Elle représente la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables. La somme est arrondie au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte d'un lot de 50 smartphones.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut E(X) = np. On obtient ici 50 × 0,045 = 2,25. Cette valeur décrit le nombre moyen d'appareils non réparables par lot, et non le nombre présent dans chaque lot particulier.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> E(X) = 2,25 : un lot de 50 smartphones compte en moyenne 2,25 appareils non réparables.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Parmi les trois propositions, choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que sous l'hypothèse nulle H_0, P(0,55 − h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Pour une loi normale, l'intervalle central à 95 % est approximativement centré sur la moyenne avec une demi-largeur égale à 1,96 fois l'écart type. Ainsi, h ≈ 1,96 × 0,037 = 0,07252. L'arrondi au centième permet de choisir la proposition correspondante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La valeur de h arrondie au centième est 0,07, soit la troisième proposition.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Le test bilatéral est effectué au seuil de 5 %. À partir de h arrondi à 0,07, l'intervalle d'acceptation de H_0 est centré en 0,55. On ne rejette pas H_0 lorsque la fréquence observée appartient à cet intervalle ; on rejette H_0 lorsqu'elle est à l'extérieur.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si la fréquence appartient à [0,48 ; 0,62] ; rejeter H_0 sinon.

Question 3°. Sur un échantillon de 180 personnes, 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Donner la conclusion du test.

La fréquence observée vaut 76 / 180 ≈ 0,422. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle d'acceptation. Le test conduit donc à rejeter H_0 au seuil de 5 % ; les données ne sont pas compatibles avec une proportion égale à 0,55.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f ≈ 0,422 n'appartient pas à [0,48 ; 0,62] : on rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité. Elle étudie le départ d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence programmée des smartphones. Les compétences évaluées portent sur les équations différentielles, l'étude de fonctions, les intégrales, les probabilités conditionnelles, la loi binomiale et les tests d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions d'une équation différentielle avec second membre s'obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée.
- La dérivée f' mesure le taux de variation instantané de f ; dans cet exercice, elle représente la vitesse du wagon en kilomètre par minute.
- Pour X suivant une loi binomiale B(n, p), l'espérance est E(X) = np.
- Pour deux événements T et L, $P(T \cap L) = P(L)P_L(T)$ et $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L)$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier une solution d'équation différentielle en calculant sa dérivée et en la substituant dans l'équation.
- Comparer les vitesses dans des unités identiques : convertir 400 km/h en kilomètre par minute.
- Contrôler les totaux du tableau d'effectifs avant de calculer les probabilités et probabilités conditionnelles.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux bornes de décision puis formuler une conclusion liée à H_0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser une condition initiale pour déterminer la solution d'une équation différentielle ?

Écrivez d'abord la solution générale en combinant la solution homogène et une solution particulière. Remplacez ensuite la variable et la fonction par leurs valeurs initiales pour déterminer la constante, puis vérifiez que la condition est satisfaite.

Q : Comment calculer une probabilité conditionnelle à partir du tableau d'effectifs ?

Pour P_L(T), divisez l'effectif des smartphones touchés par les deux formes d'obsolescence par l'effectif des smartphones touchés par l'obsolescence logicielle. Le dénominateur correspond à la condition L.

Q : Que représente la somme S à la fin de l'algorithme de la partie binomiale ?

L'algorithme additionne P(X = i) pour i de 0 à 3. La valeur finale de S est donc la probabilité que le nombre de smartphones non réparables soit compris entre 0 et 3 inclus.

Q : Comment conclure correctement le test d'hypothèse ?

Calculez la fréquence observée, comparez-la aux bornes de décision au seuil de 5 %, puis indiquez si H_0 est rejetée ou non. La conclusion porte sur les données de l'échantillon et ne prouve pas définitivement l'hypothèse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2018/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Management Commercial Opérationnel : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.