Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle** (12 questions) — **Page 3**
2. **Contrôle de conformité et durée de vie des tubes fluorescents** (9 questions) — **Page 6**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2022/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle

Un chariot de fête foraine roule initialement à 20 m/s sur un axe horizontal avant d'être ralenti par un système de freinage. La vitesse est modélisée par une équation différentielle puis étudiée au moyen d'une fonction exponentielle, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.**

La formule fournie donne, pour $y' + ay = 0$, les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$. En substituant, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'égalité est vérifiée pour tout t.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. **Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

Une solution particulière est $g(t) = 5$. En lui ajoutant les solutions de l'équation homogène associée, $ke^{-0,8t}$, on obtient toutes les solutions de l'équation avec second membre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale donne $y(0) = 5 + k = 20$, donc $k = 20 - 5 = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Ainsi, dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale d'ordonnée 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale à C a pour équation $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Sur $[0; +\infty[$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$: f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		–
$f(t)$	20	↘ 5

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Pour tout instant fini $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse n'atteint jamais zéro. Elle tend vers 5 m/s.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : selon ce modèle, le chariot ne s'arrête pas et sa vitesse tend vers 5 m/s.

Question 4. a. **La fonction F est définie par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Or cette expression est $f(t)$, donc F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

Question 4. b. **La distance parcourue entre les instants t₀ et t₁ est donnée par l'intégrale de f entre ces deux instants. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $F(1) - F(0) = 23,75 - 18,75e^{-0,8} = \frac{95}{4} - \frac{75}{4}e^{-4/5}$ m. Numériquement, elle vaut environ 15,3251 m, soit 15,33 m au centimètre près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = \frac{95}{4} - \frac{75}{4}e^{-4/5}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : recopier l'unique proposition donnant le développement limité exact de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité affiché sur le sujet est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. La proposition exacte est celle qui ajoute un reste de la forme $t^2\epsilon(t)$, avec $\epsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\epsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.**

Le point de contact est $(0; f(0)) = (0; 20)$. La pente est $f'(0) = -12e^0 = -12$. L'équation de la tangente est donc $y = f'(0)t + f(0)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La tangente à C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -12t + 20$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie des tubes fluorescents

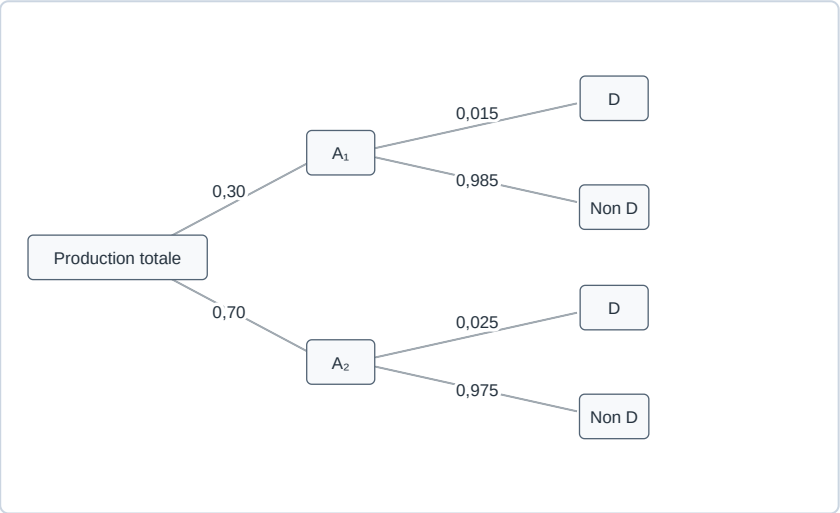
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers et contrôle la présence de défauts. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles liées aux ateliers, la durée de vie modélisée par une loi exponentielle et l'estimation de la proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des proportions de production des deux ateliers et de leurs taux de défaut, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

Les premières branches indiquent la proportion de tubes issue de chaque atelier. Depuis chaque atelier, les deux branches suivantes correspondent au défaut et à l'absence de défaut. Les probabilités inscrites sur ces branches sont les taux de défaut et leurs complémentaires.

Production et conformité des tubes



Probabilités inscrites sur les branches.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré complété ci-dessous.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité conjointe se calcule en multipliant la probabilité de provenir de l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Il s'agit de la proportion de toute la production qui vient de l'atelier 1 et présente un défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit $0{,}45\ \%$.

Question 3. **Calculer la probabilité qu'un tube présente un défaut. L'énoncé imprimé demande de montrer que P(D) = 0,0195, tandis qu'une annotation manuscrite visible indique 0,0220 : signaler et traiter cette incohérence à partir des données fournies.**

La formule des probabilités totales donne :

Atelier	Contribution à $P(D)$
1	$0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$
2	$0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0175$

La somme vaut $0{,}0220$. Elle confirme l'annotation manuscrite : la valeur imprimée $0{,}0195$ est incohérente avec les données des deux ateliers.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}0220$, soit $2{,}20\ \%$. La valeur imprimée $0{,}0195$ est erronée.

Question 4. **Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche une probabilité conditionnelle sachant que le tube n'a pas de défaut. Le numérateur est la probabilité d'être issu de l'atelier 2 et sans défaut : $0{,}70 \times 0{,}975$. Le dénominateur vaut $P(\overline{D}) = 1 - 0{,}022 = 0{,}978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0{,}70 \times 0{,}975}{0{,}978} \approx 0{,}6979$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit $69{,}8\ \%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Le sujet donne $\lambda = 0{,}001$ heure^{-1} et rappelle que l'espérance d'une loi exponentielle vaut $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Donc $E(T) = \dfrac{1}{0{,}001} = 1\,000$ heures. Selon ce modèle, un tube fonctionne en moyenne 1 000 heures avant de présenter une défaillance.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement selon le modèle.

Question 2. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La fonction de répartition donnée dans le sujet est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour $t = 8\,000$ et $\lambda = 0{,}001$, on obtient :

1. $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8}$.
2. La probabilité vaut environ $0{,}9997$, donc, arrondie au centième, $1{,}00$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$.

Question 3. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée t est le complément de la fonction de répartition, soit $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Ainsi, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Arrondie au centième, cette probabilité est $0{,}00$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue p est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes, donc $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette fréquence est utilisée comme estimation de la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Estimation ponctuelle : $\hat{p} = 0{,}975$, soit $97{,}5\ \%$.

Question 2. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.**

On applique la formule fournie avec la fréquence observée $f = 0{,}975$ et l'effectif $n = 1\,000$:

$$\left[0{,}975 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}}\ ;\ 0{,}975 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}}\right]$$

Les bornes non arrondies sont environ $0{,}965323$ et $0{,}984677$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de deux heures et composée de deux exercices de dix points. Le coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Les situations portent sur le freinage d'un chariot, des tubes fluorescents et des rivets; les compétences évaluées incluent équations différentielles, analyse, intégration, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, les solutions s'obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Une limite de f(t) égale à 5 en +∞ correspond à une asymptote horizontale d'équation y = 5.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et P(T > t) = e^(-λt).
- L'intervalle de confiance donné pour une proportion utilise f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'arbre pondéré, distinguer les proportions de production des probabilités conditionnelles de défaut.
- Comparer le résultat de P(D) calculé à partir des données avec la valeur imprimée et l'annotation manuscrite de la page.
- Pour une distance parcourue, évaluer $F(t_1) - F(t_0)$ et indiquer l'unité ainsi que l'arrondi demandé.
- Respecter les arrondis : au centième pour les probabilités de durée de vie et à 10^{-3} près pour l'intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du freinage ?

Résoudre d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, dont les solutions sont ke^(-0,8t). Ajouter une solution particulière constante pour l'équation complète, puis utiliser la condition initiale f(0) = 20 afin de déterminer la constante.

Q : Comment calculer une probabilité de durée de vie avec la loi exponentielle ?

Pour le paramètre λ = 0,001, utiliser P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt). Pour une durée supérieure à t, utiliser le complémentaire P(T > t) = e^(-λt). L'espérance de la durée de fonctionnement vaut 1/λ.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment répartir le travail ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices notés chacun sur dix points. Une répartition proche d'une heure par exercice est raisonnable, en gardant quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et l'incohérence signalée dans la question sur P(D).

Q : Que faire si la valeur demandée pour P(D) ne correspond pas aux données ?

Présenter le calcul à partir des probabilités de chaque atelier et de leurs taux de défaut, puis signaler clairement l'écart avec la valeur imprimée. La page comporte aussi une annotation manuscrite indiquant 0,0220; ne pas masquer cette contradiction.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2022/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Management Commercial Opérationnel : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.