Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**
2. **Transformée de Laplace et système électrique entrée-sortie** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2022/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. Les questions portent sur une équation différentielle, les variations et la limite de cette vitesse, la distance parcourue et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, la solution générale est $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$, donc l'exponentielle est $e^{-0,8t}$. Cette expression est définie et dérivable pour tout $t \geq 0$, et elle décrit toutes les solutions sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En la substituant dans l'équation différentielle, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'égalité est vérifiée pour tout t de l'intervalle considéré. La fonction constante donnée est donc bien une solution particulière de l'équation (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$: $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

On connaît une solution particulière de (E), la fonction constante $g(t) = 5$. À cette solution, on ajoute les solutions de l'équation homogène associée $y' + 0,8y = 0$, qui sont $Ce^{-0,8t}$. On obtient ainsi toutes les solutions de l'équation complète. La constante C peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale de (E) s'écrit $f(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$.
2. La condition initiale donne $f(0) = 5 + C = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 20 - 5 = 15$.

3. En remplaçant C par cette valeur, on obtient la solution particulière demandée, définie pour tout $t \geq 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, pour $t \geq 0$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On part de l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par multiplication par 15, le terme exponentiel tend encore vers 0. La limite de la somme est alors la limite de ce terme, à laquelle on ajoute la constante 5.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite une équation de l'asymptote à la courbe représentative C.

> La courbe d'une fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$ lorsque la fonction tend vers L en $+\infty$. Ici, la limite calculée à la question précédente est finie et vaut 5. On en déduit que la courbe C se rapproche de la droite horizontale de hauteur 5 lorsque le temps augmente sans borne.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À l'aide de l'expression de f'(t) fournie, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur tout l'intervalle : f est strictement décroissante. Son départ vaut $f(0) = 20$, et sa limite en $+\infty$ est 5.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	5, limite

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

La vitesse est donnée par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Pour tout instant fini $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. La vitesse est donc toujours strictement supérieure à 5, et ne peut jamais être nulle. Elle se rapproche de 5 à mesure que le temps augmente, sans atteindre cette valeur. Le chariot ne s'immobilise donc pas selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas, car sa vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée est $-0,8e^{-0,8t}$, d'où $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$ sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

Question 4.b. **Calculer la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, donner sa valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.**

1. La distance entre 0 et 1 seconde est $d = F(1) - F(0)$.
2. En utilisant la primitive, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$.
3. Comme $e^{-0,8} = e^{-4/5}$, la forme exacte est $\frac{95-75e^{-4/5}}{4}$ m. L'évaluation donne environ $15,3251$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$d = \frac{95 - 75e^{-4/5}}{4}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}.$$

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir et recopier l'unique proposition donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit être négligeable devant t^2. Il s'écrit donc $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions du sujet, il faut retenir celle qui contient ce reste et conserve les trois termes affichés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. On lit directement $f(0) = 20$. Avec la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point de coordonnées $(0; 20)$ et possède le coefficient directeur -12. En substituant ces valeurs dans la formule, on obtient son équation.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = -12t + 20$.

2. Transformée de Laplace et système électrique entrée-sortie

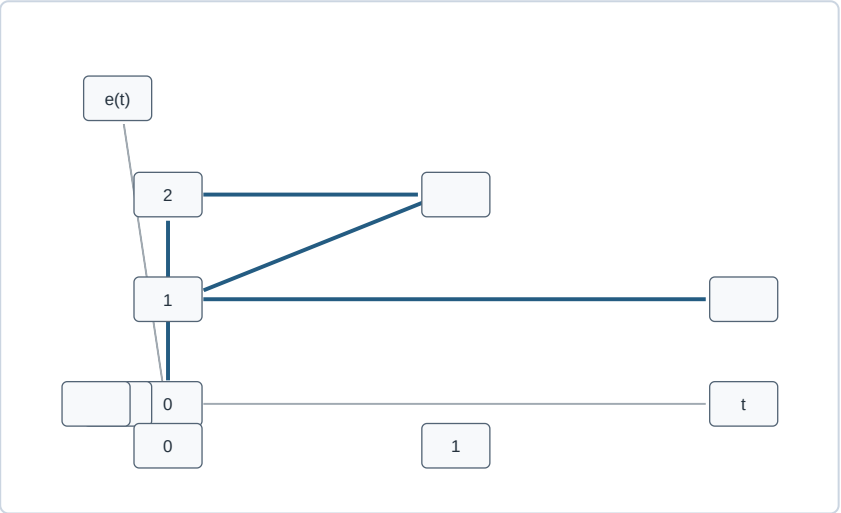
Un système électrique est décrit par sa fonction de transfert H(p) et reçoit un signal construit à partir de fonctions échelon unité décalées. L'exercice demande de tracer et transformer le signal d'entrée, de déterminer le signal de sortie par transformée de Laplace, puis d'étudier et de représenter ce signal.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

La fonction échelon vaut 0 avant son activation et 1 à partir de celle-ci, y compris à l'instant d'activation. Ainsi, à t = 0, le signal passe de 0 à 2. À t = 1, le terme U(t − 1) s'active et l'expression 2U(t) − U(t − 1) vaut alors 1. Le signal reste ensuite constant à 1. Le tracé ci-dessous représente ces trois paliers et les deux sauts.

Signal d'entrée e(t)



Tracé en escalier : saut à t = 0, puis saut à t = 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

e(t) = 0 si t < 0 ; 2 si 0 ≤ t < 1 ; 1 si t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

La transformée de Laplace est linéaire. Le formulaire donne L{U(t)} = 1/p et L{U(t − a)} = e^{-ap}/p. Pour le terme décalé, on prend a = 1. On transforme séparément les deux termes de e(t), puis on soustrait la seconde transformée de la première. Cela donne directement l'expression de E(p), pour les valeurs de p où les transformées sont définies.

✓ RÉPONSE À RETENIR

E(p) = (2 − e^{-p})/p.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. En utilisant $S(p) = H(p) \times E(p)$, démontrer que $S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^{-p}$.

1. La transformée du signal d'entrée est $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$.
2. Le sujet donne $H(p) = 1/(p + 1)$ et $S(p) = H(p)E(p)$. Donc $S(p) = (2/p - e^{-p}/p)/(p + 1)$.
3. En distribuant le dénominateur, on obtient les deux fractions demandées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^{-p}/[p(p + 1)]$.

Question 2. Vérifier l'égalité $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$.

Pour vérifier l'égalité, on met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur, $p(p + 1)$. Le numérateur devient $(p + 1) - p$, soit 1. On retrouve donc exactement le membre de gauche. Cette décomposition en éléments simples servira ensuite à déterminer les transformées inverses des termes de $S(p)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'égalité est vérifiée : $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de $1/p$, de $1/(p + 1)$, de e^{-p}/p et de $e^{-p}/(p + 1)$, en utilisant le formulaire.

On applique les deux lignes du formulaire : les deux premières inversions sont des transformées usuelles, et les deux dernières utilisent le décalage temporel $a = 1$. Le facteur e^{-p} retarde donc le signal d'une unité. Le facteur $U(t - 1)$ garantit que les fonctions retardées restent nulles avant $t = 1$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p + 1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t - 1)$
$e^{-p}/(p + 1)$	$e^{-(t - 1)}U(t - 1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les inverses, dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t - 1)$, $e^{-(t - 1)}U(t - 1)$.

Question 4. **Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

À partir de S(p), on remplace chaque fraction $1/[p(p + 1)]$ par $1/p - 1/(p + 1)$. Les inverses donnent $s(t) = 2U(t) - 2e^{-t}U(t) - U(t - 1) + e^{-(t - 1)}U(t - 1)$. Sur l'intervalle [0 ; 1[, les deux termes retardés sont nuls et U(t) vaut 1, ce qui simplifie l'expression.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Pour $0 \leq t < 1$: $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **À partir de l'expression admise de s(t) sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

Sur [1 ; +∞[, le sujet donne $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$. En t = 1, on remplace t par 1 : $s(1) = (e - 2)e^{-1} + 1$. Comme $e \times e^{-1} = 1$, cette valeur se simplifie en $2 - 2/e$. Son arrondi au dixième est 1,3.

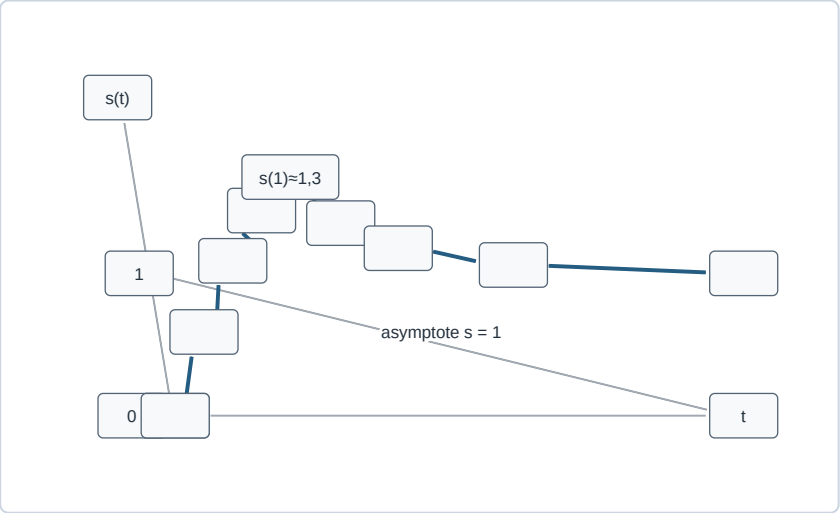
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}3$.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de s.**

Sur [0 ; 1[, la fonction $2(1 - e^{-t})$ croît de 0 jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}3$. Après t = 1, l'expression admise est $1 + (e - 2)e^{-t}$: elle décroît vers 1. Les deux expressions coïncident en t = 1. Le tracé représente cette continuité et l'asymptote horizontale de niveau 1.

Courbe du signal de sortie s(t)



Tracé qualitatif : croissance jusqu'à t = 1, puis décroissance vers s = 1.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La courbe part de (0 ; 0), atteint s(1) ≈ 1,3, puis décroît vers l'asymptote s = 1.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$. Le coefficient $e - 2$ est constant et e^{-t} tend vers 0 lorsque t tend vers +∞. Le terme produit tend donc vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 1. La limite de s(t) est ainsi déterminée par cette expression.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot de fête foraine et un système électrique, en évaluant équations différentielles, variations, intégrales, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$.
- Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et l'asymptote horizontale est $y = 5$.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$.
- Le décalage $f(t - a)U(t - a)$ correspond à la transformée de Laplace $F(p)e^{-ap}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle avec second membre constant, distinguer la solution homogène d'une solution particulière.
- Pour établir les variations, utiliser le signe de f' et indiquer la valeur initiale ainsi que la limite.
- Pour calculer une distance, évaluer une primitive aux bornes dans le bon ordre et exprimer le résultat en mètres.
- Pour une fonction décalée en Laplace, conserver le facteur e^{-ap} et respecter les intervalles demandés.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer l'asymptote horizontale de la vitesse du chariot ?

On calcule la limite de f(t) lorsque t tend vers $+\infty$. Si cette limite est un réel L, la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$.

Q : Comment retrouver la distance parcourue à partir de la vitesse ?

La distance entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle. Avec une primitive F de f, on calcule $F(t_1) - F(t_0)$, puis on arrondit selon la précision demandée.

Q : Comment organiser cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comprend deux exercices de 10 points portant sur des contextes différents. Répartissez votre temps entre eux, gardez du temps pour les graphiques sur le document-réponse et vérifiez les unités ainsi que les arrondis.

Q : Quelles précautions prendre pour les graphiques et les transformées de Laplace ?

Respectez les axes et les changements de valeur des fonctions échelon dans les tracés. Pour Laplace, appliquez les formules du formulaire, notamment le facteur exponentiel associé au décalage, puis reportez les courbes sur le document-réponse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2022/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Management Commercial Opérationnel : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.