Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (14 questions) — Page 3

2. **Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance** (10 questions) — Page 7

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — Page 11

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2023/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

Le fond d’un tiroir se rapproche du fond du meuble pendant sa fermeture. La distance entre leurs points repères est modélisée par une fonction du temps, étudiée par une équation différentielle, ses variations, un algorithme et un développement limité.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. L’équation est donc vérifiée lorsque l’un des deux facteurs est nul.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1. b. Résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 à l’aide des solutions de l’équation caractéristique et du tableau fourni.

L’équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes, -1 et -4. Le tableau donne alors une solution générale composée des exponentielles associées à ces deux racines, avec deux constantes réelles arbitraires.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. Sachant qu’à l’instant t = 0, le point M est à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse négative de -10 cm·s⁻¹, déduire f(0) et f'(0).

La fonction f désigne la distance OM, en centimètres. À l’instant initial, cette distance vaut 20 cm. Sa dérivée correspond à la vitesse du point M : le signe négatif indique que le point se rapproche de O.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l’expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$. La distance exacte s’exprime avec des exponentielles et s’obtient en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. c. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.

La fonction est continue sur $[0; 4]$. À l'instant initial, $f(0) = 20$ cm, tandis qu'à 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm. Comme cette dernière distance est inférieure à 0,5 cm, le seuil a été atteint avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : $f(4) \approx 0,427 < 0,5$ cm, donc le tiroir est fermé avant 4 s.

Partie B - Étude de fonction

Question 1. a. En utilisant la limite rappelée de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Lorsque $t \to +\infty$, les exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent toutes deux vers 0. Leurs multiples par des constantes tendent aussi vers 0. La différence de ces deux termes tend donc vers 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 0. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale à cette limite, qui est l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On applique la règle $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$ à chaque terme. Le premier terme dérive en $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, le facteur -4 de l'exposant donne $-\frac{10}{3} \times (-4)e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

On sait que $f'(t) < 0$ sur l'intervalle, donc f y est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t)$ tend vers 0 à l'infini. Le tableau indique cette décroissance.

t	**0**	$+\infty$
Variations de f	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant si nécessaire des lignes jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de f(t) arrondies à 10^{-2} et la valeur de la condition à chaque ligne.

La condition de la boucle est $f(t) > 0,5$. À chaque ligne, t augmente de 0,1 seconde. Elle reste vraie à 3,8 secondes, puis devient fausse à 3,9 secondes : la ligne 39 correspond donc à l'arrêt.

Ligne	t	$f(t)$**, arrondie à** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête avec $t = 3,9$ s.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

À 3,8 secondes, la condition est encore vraie puisque $f(3,8) \approx 0,52 > 0,5$. À 3,9 secondes, elle devient fausse car $f(3,9) \approx 0,47 < 0,5$, et la boucle s'arrête. Le tiroir est alors considéré fermé selon le seuil de l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Question 4. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$, et $f'(0) = -\frac{70}{3} + \frac{40}{3} = -10$. Ces valeurs donnent directement l'équation de la tangente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4. b. Parmi les réponses proposées, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Le développement limité fourni dans le sujet a pour partie régulière $20 - 10t - 15t^2$. Parmi les propositions, il faut choisir celle dont le reste s'écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 4. c. À partir du développement limité, indiquer si la courbe C est au-dessus ou en dessous de sa tangente T au voisinage de zéro.

La tangente est $T(t) = 20 - 10t$. Le développement limité donne $f(t) - T(t) = t^2(-15 + \varepsilon(t))$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. Pour $t > 0$ suffisamment proche de 0, cette différence est négative : la courbe est située sous sa tangente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe C est en dessous de la tangente T au voisinage de 0.

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

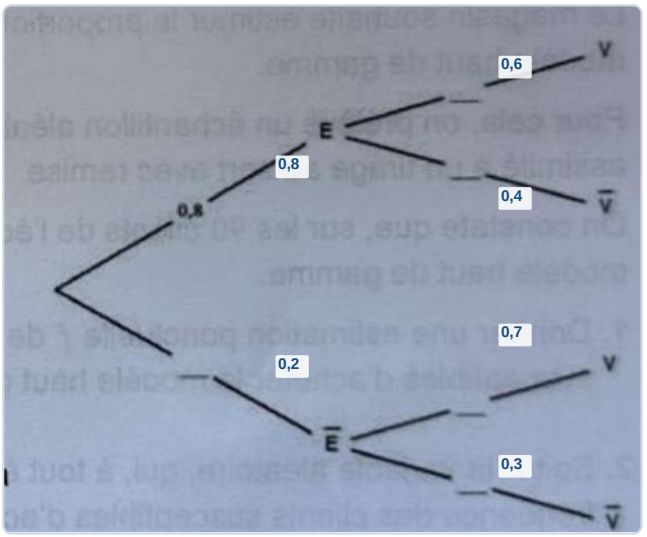
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques à ses clients et étudie les issues de ces prêts. L'exercice porte aussi sur les durées de réparation et sur l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, à partir des proportions de vélos électriques et mécaniques et des taux de vente indiqués.

La première bifurcation distingue les vélos électriques et mécaniques, avec les probabilités respectives 0,8 et 0,2. À partir de chaque type, on sépare les issues « vente » et « pas de vente ». Les probabilités complémentaires sont obtenues en soustrayant les taux de vente de 1 : pour les vélos électriques, 1 − 0,6 = 0,4 ; pour les vélos mécaniques, 1 − 0,7 = 0,3. Chaque paire de branches issues d'un même nœud totalise 1.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : électrique 0,8, mécanique 0,2 ; vente après électrique 0,6, pas de vente 0,4 ; vente après mécanique 0,7, pas de vente 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité que le vélo choisi soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, soit P(E ∩ V).

L'événement « vélo électrique et vente » correspond au chemin qui part de la branche électrique puis suit la branche vente. La probabilité de ce chemin est le produit de la probabilité d'obtenir un vélo électrique par la probabilité conditionnelle d'une vente parmi ces vélos. On calcule donc $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$. Il s'agit d'une probabilité conjointe, et non du seul taux de vente conditionnel.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un vélo électrique prêté débouche sur une vente est $P(E \cap V) = 0,48$, soit 48 %.

Question 3. Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.

Une vente peut suivre l'un des deux chemins de l'arbre : vélo électrique puis vente, ou vélo mécanique puis vente. Ces chemins sont incompatibles, donc leurs probabilités s'additionnent. Le premier chemin a pour probabilité $0,8 \times 0,6 = 0,48$, et le second $0,2 \times 0,7 = 0,14$. Ainsi, $P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62$. La probabilité totale qu'un prêt débouche sur une vente est donc bien celle annoncée dans l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est $P(V) = 0,62$, soit 62 %.

Question 4. Sachant que le prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.

On cherche la probabilité d'obtenir un vélo électrique sachant que le prêt a débouché sur une vente. La formule de probabilité conditionnelle donne $P_V(E) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)}$. Les résultats précédents donnent $P(E \cap V) = 0,48$ et $P(V) = 0,62$, d'où $P_V(E) = \frac{0,48}{0,62} \approx 0,7741935$. On arrondit cette valeur au millième, comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Parmi les prêts ayant abouti à une vente, la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique est environ $0,774$, soit 77,4 %.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X, qui compte parmi 80 vélos réparés ceux dont la réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre.

Chaque vélo réparé constitue une épreuve dont le succès est « la réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre ». La probabilité de ce succès est $p = 0,62$, et l'échantillon comporte $n = 80$ vélos. La variable X compte le nombre de succès parmi ces 80 épreuves. Comme l'énoncé précise que cette variable suit une loi binomiale, ses paramètres sont directement l'effectif et la probabilité de succès.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Les paramètres sont $n = 80$ et $p = 0,62$. Ainsi, $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$.

Question 2. Déterminer P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.

Pour une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1 - 0,62)^{40}$. Comme $1 - 0,62 = 0,38$, le calcul donne environ $0,00828$. L'arrondi au millième demandé est donc $0,008$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est $P(X = 40) \approx 0,008$, au millième.

Question 3. Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.

Sur 80 réparations, si X nécessitent moins d'une heure, les autres $80 - X$ en nécessitent plus d'une heure. La condition de l'énoncé devient $X > 80 - X$, donc $2X > 80$. Comme X est un entier, cela équivaut à $X \geq 41$. La probabilité cherchée est alors $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40)$. Le calcul de la probabilité cumulée donne environ $0,9809$, à arrondir au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que le nombre de réparations de moins d'une heure soit supérieur est $P(X \geq 41) \approx 0,981$, au millième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de ces clients.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. On compte 54 clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme parmi les 90 clients interrogés. On divise donc le nombre de réponses favorables par l'effectif total : $f = \frac{54}{90} = 0,6$. Cette fréquence observée fournit l'estimation demandée pour la proportion p.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'estimation ponctuelle de la proportion est $f = 0,6$, soit 60 % des clients.

Question 2. a. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.**

La formule fournie donne l'intervalle $[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}]$. Avec $f = 0,6$ et $n = 90$, la marge vaut $1,96\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{90}} \approx 0,101214$. Les bornes sont donc environ $0,498786$ et $0,701214$, soit, arrondies au millième, 0,499 et 0,701.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'intervalle de confiance de la proportion au niveau de 95 % est $[0,499\ ;\ 0,701]$.

Question 2. b. **Dire si l'on est certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.**

Non. L'intervalle de confiance est construit à partir des résultats d'un échantillon et porte une incertitude. Un niveau de confiance de 95 % décrit la fiabilité de la méthode lorsqu'on répète les prélèvements, et non une certitude absolue pour cet intervalle particulier. On ne peut donc pas affirmer que la proportion réelle p appartient nécessairement à l'intervalle obtenu.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on ne peut pas être certain que la proportion réelle appartienne à cet intervalle de confiance.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure 2 heures. Le coefficient est de 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Deux exercices évaluent la modélisation différentielle de la fermeture d'un tiroir, les probabilités, la loi binomiale et l'intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme de la solution générale.
- Si $f'(t) < 0$ sur un intervalle, f y est décroissante ; une limite finie en $+\infty$ peut définir une asymptote horizontale.
- Pour deux événements, $P(E \cap V) = P(E)P(V|E)$; la probabilité de vente s'obtient en additionnant les probabilités des chemins menant à V.
- Pour X suivant B(n,p), $P(X=k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$; l'intervalle fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance initiale, qui donne f(0), de la vitesse initiale, qui donne f'(0).
- Dans l'algorithme, suivre les incréments de t et vérifier la condition d'arrêt à chaque étape.
- Traduire précisément la comparaison des effectifs de réparation et tenir compte du libellé « moins d'une heure » et « plus d'une heure ».
- Respecter les arrondis demandés et ne pas présenter un intervalle de confiance comme une certitude absolue.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser les conditions initiales pour déterminer la fonction de fermeture ?

La distance initiale donne f(0). La vitesse initiale, orientée vers O et indiquée comme négative, donne f'(0). Ces deux conditions permettent de déterminer les constantes de la solution générale de l'équation différentielle.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente ?

Additionnez les probabilités des chemins menant à une vente : pour chaque type de vélo, multipliez sa probabilité par la probabilité conditionnelle de vente. Pour déterminer la probabilité d'un vélo électrique sachant qu'il y a eu une vente, divisez $P(E \cap V)$ par $P(V)$.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comprend deux exercices de 10 points chacun, et les parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les deux exercices, en gardant une marge pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis demandés.

Q : Un intervalle de confiance à 95 % garantit-il que la proportion p s'y trouve ?

Non. Le niveau de confiance décrit la méthode : sur de nombreux échantillons réalisés dans les mêmes conditions, environ 95 % des intervalles construits contiendraient p. Il ne garantit pas que l'intervalle issu d'un échantillon particulier contienne la proportion.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2023/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Management Commercial Opérationnel : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.