Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) — **Page 3**

2. **Étude d’une fonction périodique par séries de Fourier** (10 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2023/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le point O, situé au fond du meuble, et le point M, situé au fond du tiroir, est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L’exercice étudie cette fermeture par une équation différentielle, puis analyse la fonction obtenue, un algorithme de seuil et la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$, donc l’équation admet deux racines réelles distinctes. On peut aussi factoriser : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. En annulant chacun des facteurs, on obtient les deux solutions de l’équation caractéristique.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. À partir des racines de l’équation caractéristique et du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L’équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, -1 et -4. Le tableau fourni indique que la solution générale de l’équation différentielle est une combinaison linéaire des exponentielles associées aux racines. Aucune condition initiale n’est imposée ici : les deux constantes restent donc arbitraires.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la distance initiale et de la vitesse initiale du tiroir, déterminer f(0) et f'(0).

Grandeur initiale	Traduction mathématique
Distance OM : 20 cm	$f(0) = 20$
Vitesse vers O : -10 cm·s⁻¹	$f'(0) = -10$

La distance correspond à la valeur de la fonction. Sa dérivée représente la vitesse de variation de cette distance ; le signe négatif traduit le rapprochement du tiroir vers O.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s⁻¹.

Question 2.b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace t par 2 dans l'expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$. Les exponentielles sont conservées afin de donner la valeur exacte demandée. La distance est exprimée en centimètres, comme dans la définition de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \dfrac{70}{3}e^{-2} - \dfrac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si l'affirmation du constructeur, selon laquelle le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, est exacte et justifier.**

À $t = 4$, la formule donne $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,428$ cm. Cette distance est strictement inférieure au seuil de fermeture de 0,5 cm. La fonction est continue, avec une distance initiale de 20 cm ; elle atteint donc le seuil avant quatre secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : à 4 s, $OM \approx 0,428$ cm, sous le seuil de 0,5 cm. Le tiroir se ferme donc en moins de 4 s.

Partie B

Question 1.a. **En utilisant la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les deux exposants tendent vers $-\infty$. D'après la limite rappelée dans l'énoncé, chacune des exponentielles tend vers zéro ; leur combinaison linéaire tend donc également vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f et en donner une équation.**

Une limite finie de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ donne une asymptote horizontale à la courbe en cet infini. La limite calculée à la question précédente vaut zéro. L'asymptote horizontale est donc l'axe des abscisses.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

L'asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$ a pour équation $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de la dérivée f'(t) pour tout t de l'intervalle [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle avec la règle $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Ainsi, la dérivée de e^{-t} est $-e^{-t}$, et celle de e^{-4t} est $-4e^{-4t}$. En tenant compte des coefficients de f, on obtient l'expression de sa dérivée sur tout l'intervalle demandé.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

L'énoncé donne $f'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$, donc f y est strictement décroissante. Sa valeur initiale est $f(0) = 20$, tandis que sa limite en $+\infty$ vaut 0. Le tableau résume ces informations.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variations de f	20	$\searrow 0$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en calculant les valeurs de f(t) arrondies au centième et en évaluant la condition jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

La boucle augmente t de 0,1 à chaque passage et s'arrête dès que $f(t) \leq 0,5$. Les valeurs affichées sont arrondies au centième ; la condition se teste sur la valeur non arrondie. Les lignes 36 à 38 restent vraies, puis la ligne 39 provoque l'arrêt.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3,9$ s.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

À $t = 3,8$, la condition $f(t) > 0,5$ est encore vraie. La boucle ajoute alors 0,1, puis le test à $t = 3,9$ devient faux puisque $f(3,9) \approx 0,47$ cm. L'algorithme s'arrête avec cette valeur de t ; selon le critère de l'énoncé, le tiroir est alors fermé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : le tiroir est fermé, car $OM \approx 0,47$ cm, inférieur à 0,5 cm.

Question 4. La position moyenne est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

On intègre terme à terme : $m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4$. En évaluant aux bornes, on obtient $m = \frac{1}{4}\left(\frac{70}{3}(1-e^{-4}) - \frac{5}{6}(1-e^{-16})\right)$. Il reste à réduire le terme constant et les coefficients des exponentielles.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

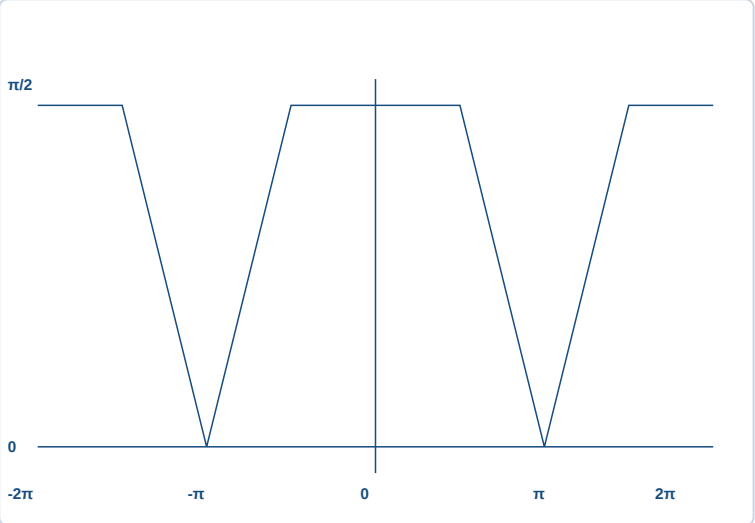
2. Étude d’une fonction périodique par séries de Fourier

On étudie une fonction paire de période 2π, définie sur [0 ; π] par une constante sur la première moitié de l’intervalle, puis par une fonction affine décroissante sur la seconde moitié. Les questions portent sur sa représentation graphique, ses coefficients de Fourier, une somme partielle et l’approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l’intervalle [-2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux, de sa parité et de sa période.

Sur $[-2$
$pi; 2$
$pi]$, on répète le motif de période 2
pi et on utilise la parité. Les plateaux sont à la hauteur
$pi/2$; les portions inclinées relient les points où la fonction vaut
$pi/2$ à ceux où elle vaut 0.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Graphe pair et de période 2
pi, avec des plateaux à
$pi/2$ et des segments inclinés jusqu’à 0.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction f est paire et
$sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur $[-$
$pi;$
$pi]$, intervalle de longueur égale à une période, est nulle. Le coefficient b_n, proportionnel à cette intégrale, est donc nul pour tout n
$geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$b_n = 0$ pour tout entier n
$geq 1$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation vaut
$omega =$
$dfrac{2pi}{T}$. Avec la période $T = 2$
pi, on obtient
$omega =$
$dfrac{2pi}{2pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant de Fourier a_0 est égal à 3π/8.

Par parité, $a_0 =$
$dfrac{1}{pi}$
$int_0^{pi} f(t)$
$, dt$. L'aire est la somme d'un rectangle et d'un triangle :
$int_0^{pi} f(t)$
$, dt =$
$dfrac{pi}{2}$
$times$
$dfrac{pi}{2} +$
$dfrac{1}{2}$
$times$
$dfrac{pi}{2}$
$times$
$dfrac{pi}{2} =$
$dfrac{3pi^2}{8}$. Ainsi, $a_0 =$
$dfrac{3pi}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 =$
$dfrac{3pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, que aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt) dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt) dt.**

La formule de Fourier pour une fonction paire donne $a_n =$
$dfrac2pi$
$int_0^pi f(t)$
$cos(nt)$
$, dt$. On sépare à
$pi/2$, où change l'expression de f :

$$a_n = frac2pi left(int_0^pi/2 fracpi2 cos(nt) , dt + int_pi/2^pi (pi - t) cos(nt) , dt right).$$

En simplifiant le premier terme, on obtient la formule demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n =$
> $displaystyle$
> $int_0^pi/2$
> $cos(nt)$
> $, dt +$
> $frac2pi$
> $int_pi/2^pi ($
> $pi - t)$
> $cos(nt)$
> $, dt.$

Question 6. **À partir de la formule fournie pour aₙ, déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.**

On utilise $a_n =$
$dfrac2pin^2$
$left($
cos
$left($
$dfracnpi2$
$right) -$
$cos(n$

$pi)$
$right)$. Pour $n = 1, 2, 3$, les valeurs des cosinus donnent successivement les trois coefficients exacts.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_1 =$
> $dfrac2pi,$
> $quada_2 = -$
> $dfrac1pi,$
> $quada_3 =$
> $dfrac29pi.$

Question 7. **Déduire les expressions obtenues pour les coefficients jusqu'à n = 3 afin d'écrire la somme partielle s_3(t) = 3π/8 + (2/π)cos(t) - (1/π)cos(2t) + (2/(9π))cos(3t).**

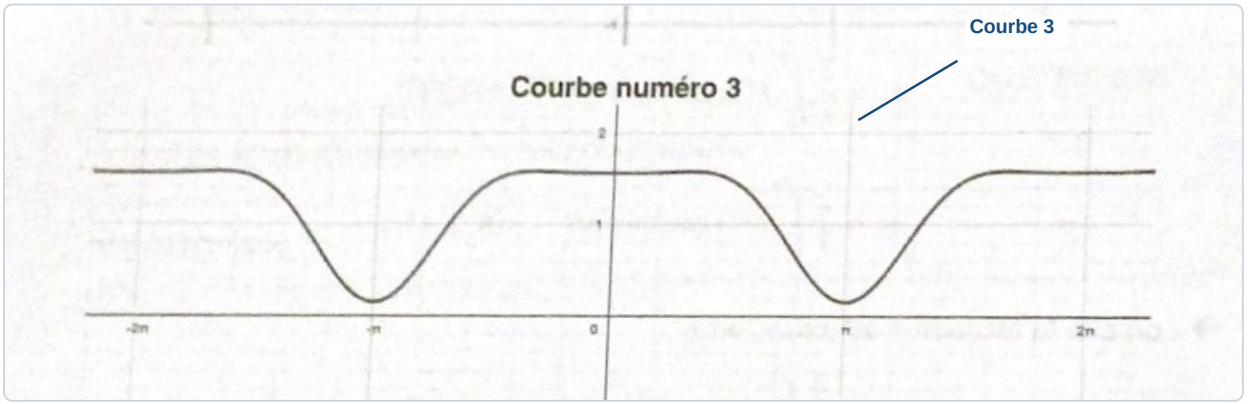
Comme $b_n = 0$, la somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + a_1$
$cos(t) + a_2$
$cos(2t) + a_3$
$cos(3t)$. En remplaçant chaque coefficient par sa valeur, on obtient l'expression demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) =$
> $dfrac3pi8 +$
> $dfrac2pi$
> $cos(t) -$
> $dfrac1pi$
> $cos(2t) +$
> $dfrac29pi$
> $cos(3t).$

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

La courbe correspondant à s_3 est la courbe numéro 3.

Courbe correspondant à s_3



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour P = (a₀)² + 1/2[(a₁)² + (a₂)² + (a₃)²], donner une valeur approchée de P à 10⁻⁴.

En substituant les coefficients exacts dans l'expression de P :

$$P = left(frac3pi8 right)^2 + frac12 left[left(frac2pi right)^2 + left(- frac1pi right)^2 + left(frac29pi right)^2 right] approx 1,6437.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

P
$approx 1,6437.$

Question 9.b. Sachant que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F², choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est attendue, sans justification.

Avec P
$approx 1,6437$ et $F^2 =$
$pi^2/6$, l'erreur relative est d'environ $0,074$
,
. La proposition la plus proche est donc $0,1$
,
.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$0,1$
,
.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023 (code 23MATGRB2), dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Elle modélise la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et étude de fonction, puis étudie une fonction paire périodique, ses coefficients de Fourier et l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent les exponentielles de la solution générale.
- Si $f'(t) < 0$ sur un intervalle, alors f y est strictement décroissante.
- Pour une fonction paire de période T, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour $n \geq 1$.
- La somme partielle $s_n(t) = a_0 + \Sigma_{k=1}^{n}(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t))$ approxime le développement de Fourier.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : f(t) est une distance en centimètres et t un temps en secondes.
- Dans l'algorithme, vérifier la valeur de t, l'arrondi au centième et le sens strict de la condition d'arrêt.
- Pour Fourier, utiliser la période et la parité données, et distinguer a_0 des coefficients a_n.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à la valeur de référence F^2 et rapporter l'écart à cette référence.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution générale de l'équation différentielle de l'exercice 1 ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale de la forme $y(t) = C_1e^{(r_1t)} + C_2e^{(r_2t)}$, où C_1 et C_2 sont des constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction est paire et le terme sin(nt) est impair. Leur produit est donc impair sur un intervalle symétrique, ce qui annule l'intégrale définissant b_n. Les termes sinus n'apparaissent ainsi pas dans le développement de Fourier.

Q : Comment gérer les questions liées à l'algorithme et le temps pendant l'épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Pour l'algorithme, avancez par pas de 0,1, consignez les valeurs demandées et arrêtez-vous dès que la condition devient fausse. Gardez du temps pour vérifier les calculs.

Q : Quelles précautions prendre pour répondre aux questions de Fourier ?

Appuyez-vous sur la période et la parité de la fonction, puis appliquez les formules du formulaire en respectant leurs facteurs. Pour la question à choix multiple sur l'erreur, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2023/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Management Commercial Opérationnel : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.