Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée sur les pages fournies**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Évolution de la température de l'eau d'un spa** (12 questions) — **Page 3**

2. **Contrôles qualité et étude de la clientèle d'une minoterie** (12 questions) — **Page 6**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2023/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution de la température de l’eau d’un spa

Après la coupure du chauffage, l’eau du spa, initialement à 38 °C, refroidit dans un environnement à 25 °C. Une équation différentielle modélise cette évolution et sert à étudier la température, son évolution à long terme et le déclenchement d’une alarme.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle homogène y' + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

On résout $y' = -0{,}05y$, équation différentielle homogène à coefficients constants. La solution générale est une exponentielle dont le coefficient est réel arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

Si $y(t) = k$ est constante, alors $y' = 0$. En remplaçant dans l’équation, $0{,}05k = 1{,}25$, d’où $k = 1{,}25/0{,}05 = 25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

La solution générale de l’équation complète s’obtient en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l’équation homogène. Avec la solution particulière constante 25, on obtient la famille annoncée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

La condition initiale $f(0) = 38$ donne $C + 25 = 38$, donc $C = 13$. En remplaçant C dans la solution générale, on obtient bien l’expression demandée pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

En remplaçant t par 24 dans le modèle, $f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 \approx 28{,}9$. Cette valeur correspond à la température de l'eau 24 heures après la coupure du chauffage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(24) \approx 28{,}9\ ^\circ\text{C}$.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout t de [0 ; +∞[.

On dérive le terme exponentiel par composition : la dérivée de $-0{,}05t$ vaut $-0{,}05$. Le terme constant 25 a une dérivée nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[, puis dire si ce sens de variation est cohérent avec le contexte et argumenter.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0{,}05t} > 0$, donc $f'(t) < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. C'est cohérent avec la situation : une fois le chauffage coupé, l'eau refroidit.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de f en +∞.

Quand $t \to +\infty$, l'exponentielle $e^{-0{,}05t}$ tend vers 0. Le terme $13e^{-0{,}05t}$ tend donc vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 25.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25$.

Question 3. b). Interpréter la valeur de la limite dans le contexte de l'exercice.

La température de l'eau se rapproche de 25 °C à long terme. Cette valeur est celle de la température ambiante extérieure, vers laquelle l'eau tend après l'arrêt du chauffage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À long terme, l'eau tend vers la température ambiante : 25 °C.

Question 4. a). L'alarme sonne lorsque la température devient strictement inférieure au seuil programmé. Pour un seuil de 36 °C, déterminer par le calcul la durée exacte après la coupure à laquelle elle sonnera, puis donner cette durée arrondie à la minute.

Au passage du seuil, $f(t) = 36$, donc $13e^{-0{,}05t} = 11$ et $t = 20\ln(13/11)$ heures. Cela donne environ $200{,}465$ minutes, soit 3 h 20 min à la minute près. Comme l'alarme se déclenche sous 36 °C, elle sonne juste après cet instant de passage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Passage du seuil après $20\ln(13/11)$ h, soit 3 h 20 min à la minute près.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme fourni, qui augmente H d'une heure et actualise la température T tant que T ≥ 34.

L'algorithme actualise la température à chaque heure. À $H = 7$, elle vaut environ $34{,}161$ °C, donc la boucle continue. À $H = 8$, elle vaut environ $33{,}714$ °C, inférieur à 34 °C : la boucle s'arrête et affiche alors $H = 8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme affiche 8.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

La boucle augmente H d'une heure et s'arrête dès que la température calculée devient strictement inférieure à 34 °C. L'algorithme cherche donc la première heure entière après la coupure où l'eau passe sous ce seuil.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'eau passe sous 34 °C pour la première fois à l'heure entière $H = 8$.

2. Contrôles qualité et étude de la clientèle d'une minoterie

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes et le taux d'humidité du blé reçu. L'exercice étudie également le poids des sacs de farine, puis les probabilités associées aux catégories de clients qui acceptent de tester la nouvelle farine La Romaine.

Partie A

Question 1. a). À partir des indices d'extensibilité mesurés sur cinq échantillons de pâte, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

Les cinq indices relevés sont 104, 81, 83, 57 et 55 mm. Leur moyenne est $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. La somme des carrés des écarts à la moyenne vaut $28^2 + 5^2 + 7^2 + (-19)^2 + (-21)^2 = 1660$. En divisant par l'effectif 5 puis en prenant la racine carrée, on obtient l'écart-type : $\sigma = \sqrt{1660/5} \approx 18,22$ mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En prenant σ = 18 mm, vérifier qu'aucune des cinq valeurs ne se situe en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ], puis conclure si le technicien doit tester cinq nouveaux échantillons.

On utilise la moyenne obtenue en 1. a), soit 76 mm, et l'écart-type imposé dans cette question, $\sigma = 18$ mm. L'intervalle de contrôle est $[\bar{x} - 2\sigma\ ;\ \bar{x} + 2\sigma] = [76 - 2 \times 18\ ;\ 76 + 2 \times 18] = [40\ ;\ 112]$ mm. Les cinq mesures 104, 81, 83, 57 et 55 mm appartiennent à cet intervalle. Aucune mesure n'étant à l'extérieur, la condition de déclenchement du nouveau test n'est pas remplie.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aucune valeur n'est hors de l'intervalle : aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. À partir des masses et des taux d'humidité des deux livraisons, montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans un même silo vide, où le taux d'humidité doit être inférieur à 13 %.

Le taux d'humidité du mélange est la moyenne pondérée des taux, avec les masses comme poids. On calcule $\frac{29540 \times 12,4 + 14540 \times 14,1}{29540 + 14540} = 12,960753\ldots\,\%$. Ce taux est strictement inférieur à la limite de 13 % exigée dans le silo. Le technicien peut donc autoriser le déchargement des deux camions dans le même silo vide.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Taux du mélange : environ 12,961 %. Déchargement autorisé.

Partie B

Question 1. La variable aléatoire X, qui associe à chaque sac son poids en kilogrammes, suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un sac ait une masse inférieure à 25 kg.

La variable X suit la loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. On la centre et on la réduit : $Z = (X - 25,2)/0,1$. Pour la limite de 25 kg, le score réduit vaut $(25 - 25,2)/0,1 = -2$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2)$. La loi normale centrée réduite donne environ 0,0228, qui s'arrondit à 0,023 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0,023$.

Question 2. a). Donner un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égal à 0,95, à 10^{-2} près.

Pour une loi normale, l'intervalle centré sur la moyenne qui contient environ 95 % des valeurs correspond à environ 1,96 écart-type de chaque côté. Ici, $h \approx 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg. Arrondi au centième, cela donne $h = 0,20$ kg. Les bornes correspondantes sont 25,00 kg et 25,40 kg, ce qui fournit bien une probabilité centrale approximativement égale à 0,95.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Un choix convenable est $h = 0,20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi la courbe ne peut pas représenter la fonction de densité de la variable aléatoire X.

La courbe du sujet est centrée autour de 25,2 kg, ce qui correspond à la moyenne, mais elle est très étalée sur l'axe des masses. Or, avec un écart-type de 0,1 kg, environ 95 % des valeurs devraient être dans l'intervalle $[25,2 - 1,96 \times 0,1\ ;\ 25,2 + 1,96 \times 0,1]$, soit environ $[25,00\ ;\ 25,40]$ kg. L'étalement représenté est donc incompatible avec la loi de X.

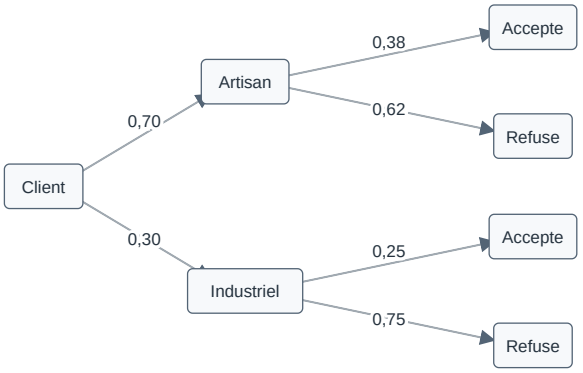
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée : environ 95 % des masses devraient être entre 25,00 et 25,40 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation décrite par un arbre pondéré, en distinguant les artisans boulangers des boulangers industriels et les clients qui acceptent de tester La Romaine.

On note A l'événement « le client est artisan boulanger » et T l'événement « le client accepte de tester La Romaine ». Les données donnent $P(A) = 0,70$, donc $P(\overline{A}) = 0,30$. Les probabilités conditionnelles d'acceptation sont 0,38 pour les artisans et 0,25 pour les industriels. Les probabilités de refus sont leurs compléments : 0,62 et 0,75. L'arbre ci-dessous porte ces probabilités sur les branches.

Arbre pondéré : catégorie de client et acceptation du test



Probabilités conditionnelles inscrites sur les branches.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : artisan 0,70 ; industriel 0,30 ; acceptation 0,38 et 0,25 ; refus 0,62 et 0,75.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

On note A l'événement « le client est un artisan boulanger » et T l'événement « il accepte de tester La Romaine ». La probabilité que le client soit artisan est $P(A) = 0,70$. Parmi les artisans, la probabilité d'accepter est $P(T \mid A) = 0,38$. La probabilité de l'intersection est donc le produit correspondant à la branche artisan et acceptation : $P(A \cap T) = P(A)P(T \mid A) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Les clients sont soit artisans, soit boulangers industriels. Ces catégories étant incompatibles, la probabilité d'accepter le test est la somme des probabilités des deux branches d'acceptation. Ainsi, $P(T) = P(A)P(T \mid A) + P(\overline{A})P(T \mid \overline{A})$. En remplaçant par les données, $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,341$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T) = 0,341$.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer à 10^{-3} près la probabilité qu'il soit un artisan boulanger.

On cherche la probabilité qu'un client soit artisan sachant qu'il a accepté le test. Par la formule des probabilités conditionnelles, $P(A \mid T) = P(A \cap T)/P(T)$. Les résultats précédents donnent $P(A \cap T) = 0,266$ et $P(T) = 0,341$. Donc $P(A \mid T) = 0,266/0,341 \approx 0,78005865$, soit 0,780 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \mid T) \approx 0,780$.

Question 4. a). Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au plus 60 clients parmi les 200 choisis aient testé La Romaine.

La variable suit la loi binomiale $\mathcal{B}(200; 0,341)$. « Au plus 60 » correspond à $Y \leq 60$. La probabilité se calcule en additionnant les probabilités binomiales de 0 à 60 : $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} 0,341^k \times 0,659^{200-k}$. Le calcul de cette somme donne environ 0,125, au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4. b). Calculer l'espérance de Y et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est $E(Y) = np$. Ici, $n = 200$ et $p = 0,341$, donc $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Cette espérance représente le nombre moyen de clients ayant testé La Romaine dans des échantillons de 200 clients. Elle ne signifie pas que chaque échantillon comporte exactement 68,2 clients.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En moyenne, 68,2 clients sur 200 auront testé La Romaine.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRD1. La durée et le coefficient ne figurent pas sur les pages fournies. Elle traite du refroidissement d'un spa, des contrôles qualité d'une minoterie, du poids des sacs et de l'acceptation d'une nouvelle farine. Les compétences évaluées sont la résolution d'équations différentielles, les statistiques, les lois de probabilité et l'interprétation de résultats.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre y' + ay = b, combiner la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière.
- Un taux d'humidité après mélange se calcule en pondérant chaque taux par la masse correspondante.
- La loi normale de moyenne μ est symétrique autour de μ ; un intervalle centré en μ contient la probabilité recherchée.
- Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale f(0) = 38 pour déterminer la constante de la solution différentielle.
- Préciser les unités, l'arrondi demandé et l'interprétation concrète de chaque résultat.
- Pour un mélange, pondérer les taux d'humidité par les masses de blé, pas par une moyenne simple.
- Distinguer probabilité d'intersection et probabilité conditionnelle dans l'arbre de probabilités.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution du modèle différentiel du spa ?

Résoudre d'abord l'équation homogène, puis chercher une solution particulière constante. La solution générale est leur somme. Utiliser ensuite la condition f(0) = 38 pour déterminer la constante d'intégration.

Q : Comment calculer l'humidité du mélange des deux livraisons ?

Multiplier chaque masse de blé par son taux d'humidité pour obtenir la masse d'eau correspondante. Additionner ces masses d'eau, puis diviser par la masse totale de blé et comparer le taux obtenu au seuil de 13 %.

Q : Comment calculer l'espérance du nombre de clients testeurs ?

Pour une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341, l'espérance vaut np. Elle correspond au nombre moyen de clients qui testent la farine dans des groupes répétés de 200 clients.

Q : Comment calculer la probabilité conditionnelle demandée en partie C ?

La probabilité qu'un client soit artisan sachant qu'il a testé la farine est la probabilité qu'il soit artisan et testeur divisée par la probabilité qu'il ait testé la farine. Le dénominateur doit être non nul.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsmco.fr/assets/annales/bts-mco/E2 - Mathématiques/2023/BTS MCO - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Management Commercial Opérationnel : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.